Über die Variation von Doppelintegralen mit variierender Begrenzungslinie.[1])

Von Eugen Gergely.

Einleitung.

Im Falle des einfachsten Variationsproblems (bei vorgeschriebenen Randwerten)

$$\iint\limits_T f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy = \text{Min.}$$

bewies A. Haar,[2]) dass die gesuchte Funktion: $z = z(x\,y)$ dem folgenden partiellen Differentialgleichungsystem genügt:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2\,\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\, \partial y},$$

wo $\omega(x, y)$ und $\Omega(x, y)$ im Gebiete T einmal stetig differenzierbare Hilfsfunktionen sind und wo ausserdem auch $\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x\, \partial y}$ existiert und stetig ist. (Wenn das Integral z nicht enthält, so ist $\Omega \equiv 0$.)

Die Ableitung dieses Resultates erfolgt *ohne Voraussetzung der Existenz der zweiten Ableitungen* der Extremalfunktion $z = z(x, y)$ mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Sind $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in einem Gebiete T stetige Funktionen und ist

$$\iint\limits_T \left(u\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\,\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) dx\, dy = 0$$

[1]) Auszug aus einer der Math.-Naturwissenschaftlichen Fakultät der kgl. Franz Josef Universität in Szeged vorgelegten Inauguraldissertation.

[2]) „Über die Variation der Doppelintegrale." Journal für Math. Bd. 149. S. 1—18.

für alle $\zeta(x, y)$, welche an der Begrenzung dieses Gebietes verschwinden und in seinem Innern einmal stetig differenzierbar sind, dann verschwindet das Integral

$$\int_C (u\,dy - v\,dx)$$

für jeden im Innern des Gebietes liegende geschlossene Integrationsweg C. Mit anderen Worten: es existiert eine einmal stetig differenzierbare Funktion $\omega(x, y)$, für welche

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y) \qquad \textit{ist.}$$

Wir wollen das partielle Differentialgleichungsystem (1) auf die Variation von Doppelintegralen mit variierender Begrenzungslinie anwenden. Die gewonnenen Resultate sind nicht neu, bei ihrer Ableitung wird aber die *Existenz der zweiten Ableitungen der gesuchten Funktion nicht vorausgesetzt,* was bei den bisherigen Ableitungen stets vorausgesetzt war.

§ 1.

Ein Variationsproblem von Doppelintegralen mit variabler Begrenzungslinie.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Variationsproblem

$$I = \iint_T f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy = \text{Min.},$$

wo die Fläche $z(x, y)$ der Bedingung unterworfen ist, dass ihre Begrenzungslinie auf einem zur (x, y) Ebene senkrechten Zylinder liegt.

Es seien $$x = x(s), \quad y = y(s)$$

— wo $x(s)$, $y(s)$ stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s sind — die Gleichungen der geschlossenen Grundkurve K des Zylinders und es sei T das Innere der Kurve K, so genügt die gesuchte Funktion $z(x, y)$ — wie bekannt — den Gleichungen (1), da unsere Extremalfunktion a fortiori ein Minimum liefern muss, falls man zur Konkurrenz nur solche Funktionen zulässt, die auf K dieselben Randwerte als $z(x, y)$ annehmen. Daher ist im vorliegenden Falle

$$\delta I = \iint\limits_T \left(\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_T \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta \right] dx\, dy = 0,$$

für *alle* im Gebiete T stetig differenzierbare Funktionen $\zeta = \zeta(x, y)$.

Diese Form der ersten Variation lässt sich als die Summe von zwei Integralen schreiben:

$$\delta I = I_1 + I_2 = \iint\limits_T \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta \right] dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_T \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] dx\, dy = 0,$$

wo beide Integrale sich noch weiter vereinfachen lassen.

Aus den Gleichungen

$$\iint\limits_T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta\, dx\, dy = \iint\limits_T \frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)}{\partial x} dx\, dy - \iint\limits_T \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx\, dy$$

$$\iint\limits_T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta\, dx\, dy = \iint\limits_T \frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)}{\partial y} dx\, dy - \iint\limits_T \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} dx\, dy$$

folgt durch Addition:

$$2 \iint\limits_T \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \zeta\, dx\, dy = \iint\limits_T \left[\frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)}{\partial y} \right] dx\, dy -$$

$$- \iint\limits_T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= - \iint\limits_T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy + \int\limits_K \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy - \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx \right).$$

I_1 hat also die Form:

$$\int\limits_K \left(\zeta \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy - \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx \right) = \int\limits_0^S \zeta(s) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right] ds,$$

wo S die Bogenlänge der Kurve K bedeutet.

Das Integral I_2 lässt sich folgenderweise umformen:

$$I_2 = \iint\limits_T \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_T \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{F_\zeta} \left[- \frac{\partial \omega}{\partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos(n, y) \right] do,$$

wo F_ζ die Fläche $\zeta = \zeta(x, y)$ und n die nach oben gerichtete Normale der Fläche F_ζ bedeutet. Dieses Integral lässt sich mit Hilfe des Satzes von Stokes auf die folgende Form bringen:

$$I_2 = - \int\limits_{K_\zeta} \omega\, dz\,,$$

wo K_ζ die Begrenzungslinie der Fläche $\zeta(x, y)$ ist. In der Tat, es gilt nach dem erwähnten Satze

$$\iint\limits_F \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cos(n, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right] do = - \int\limits_K (P\, dx + Q\, dy + R\, dz),$$

wo $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ und $R(x, y, z)$ stetig differenzierbare Funktionen sind und K die Begrenzung, n die Normale der Fläche F bedeutet. Setzen wir

$$P \equiv Q \equiv 0, \quad R = \omega, \quad F = F_\zeta$$

so erhalten wir I_2 in der erwähnten Form.

Die Funktionen ω und ζ spielen übrigens — abgesehen vom Vorzeichen — eine symmetrische Rolle und es lässt sich I_2 auch in der Form

$$I_2 = \int\limits_{K_\omega} \zeta\, dz$$

schreiben, wo K_ω die Begrenzung der Fläche $\omega = \omega(x, y)$ ist.

Die für I_2 gewonnene Formel

$$I_2 = -\int_0^S \omega[x(s), y(s)] \frac{d\zeta[x(s), y(s)]}{ds} ds = -\int_0^S \omega(s)\zeta'(s)\, ds$$

führt man durch partielle Integration — die erlaubt ist, da $\omega(x, y)$ ein stetig differenzierbare Funktion ist — in die folgende Form über:

$$I_2 = \int_0^S \omega'(s)\zeta(s)\, ds.$$

Das vom Integralzeichen freie Glied ist Null, da ζ und ω für $s = 0$ und $s = S$ dieselben Werte annehmen.

Das Verschwinden der ersten Variation ist daher in unserem Problem durch die folgende Gleichung formuliert:

$$\text{(2)} \quad \delta I = I_1 + I_2 = \int_0^S \zeta(s)\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \omega'(s)\right] ds = 0,$$

die für *alle* stetig differenzierbare Funktionen $\zeta(s)$ gilt, welche der Bedingung

$$\zeta(0) = \zeta(S)$$

genügen. Beschränken wir uns auf Funktionen, für welche

$$\zeta(0) = \zeta(S) = 0$$

ist, so erhalten wir aus (2) mit Hilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung,

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} y'(s) - \frac{\partial\Omega}{\partial x} x(s) + \omega'(s) \Big|^K = 0.$$

Ersetzt man darin $\omega'(s) = \frac{\partial\omega}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial\omega}{\partial y} y'(s) \Big|^K$ durch

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) x'(s) + \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) y'(s) \Big|^K,$$

so ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial p} y'(s) - \frac{\partial f}{\partial q} x'(s) \Big|^K = 0.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Grenzgleichung des Problems, die wir, ohne die Existenz der zweiten Ableitungen anzunehmen, bewiesen haben.

§ 2.

Die Variation von Doppelintegralen mit variabler Begrenzung in Parameterdarstellung.

Mit Anwendung des Lemmas von A. HAAR auf das Variationsproblem in Parameterdarstellung

$$I = \iint\limits_T F(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\, du\, dv = \text{Min.}$$

ergibt sich sofort das folgende partielle Differentialgleichungsystem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_u} = \frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_v} = -\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2\, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_u} = \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_v} = -\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\, \frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial u\, \partial v};$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_u} = \frac{\partial \overline{\overline{\omega}}}{\partial v} + \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_v} = -\frac{\partial \overline{\overline{\omega}}}{\partial u} + \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2\, \frac{\partial^2 \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u\, \partial v},$$

wo $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}, \Omega, \overline{\Omega}, \overline{\overline{\Omega}}$ im Gebiete T einmal bzw. zweimal stetig differenzierbare Hilfsfunktionen von u und v sind.

Wir beschäftigen uns mit dem Fall, wo die Begrenzungslinie der Fläche

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

auf einer gegebenen Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

liegt, und nehmen an, dass $\varphi(x, y, z)$ eine stetig differenzierbare Funktion ist. Es seien

$$x = X(u, v; \varepsilon), \quad y = Y(u, v; \varepsilon), \quad z = Z(u, v; \varepsilon)$$

die Gleichungen einer einparametrigen Schar von variierten Flächen mit dem Parameter ε; die in Betracht kommende Werte u, v liegen im Gebiete T. Sind $u = u(t)$, $v = v(t)$ die Gleichungen der Begrenzungslinie K von T, wo u und v stetig differenzierbare Funktionen von t sind und $u'(t)^2 + v'(t)^2 \neq 0$ ist, und bedeuten X_K, Y_K, Z_K die Werte der Funktionen X, Y, Z auf der Kurve K, so hat die Bedingung die Form

$$\varphi(X_K, Y_K, Z_K) = 0.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\xi = X_\varepsilon(u, v; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \quad \eta = Y_\varepsilon(u, v; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}, \quad \zeta = Z_\varepsilon(u, v; \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$$

und bezeichnen mit ξ_K, η_K, ζ_K die Werte der Funktionen ξ, η, ζ auf

K, so folgt aus der letzten Bedingung durch Differentiation

(4) $$\varphi_x \xi_K + \varphi_y \eta_K + \varphi_z \zeta_K \Big|^K = 0.$$

Die erste Variation des vorgelegten Integrals lässt sich nach der in § 1 erwähnten Umformung in der folgenden Form schreiben:

$$\delta I = \int\limits_K \Bigg[\xi_K \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} v' - \frac{\partial \Omega}{\partial u} u' + \omega'(s) \right) +$$
$$+ \eta_K \left(\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial u} u' + \overline{\omega}'(s) \right) +$$
$$+ \zeta_K \left(\frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u} u' + \overline{\overline{\omega}}'(s) \right) \Bigg] ds = 0.$$

Multipliziert man die Gleichung (4) mit einer willkürlichen Funktion $\lambda(s)$, integriert auf K und addiert dieses Integral zu δI, so erhält man

$$\int\limits_K \sum \xi_K \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v} v' - \frac{\partial \Omega}{\partial u} u' + \omega'(s) + \lambda \varphi_x \right) ds = 0,$$

wobei die Summation sich auf eine Vertauschung der Buchstaben ξ_K, η_K, ζ_K; $\Omega, \overline{\Omega}, \overline{\overline{\Omega}}$; $\omega, \overline{\omega}, \overline{\overline{\omega}}$ bzw. $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ bezieht.

Von den drei Funktionen ξ_K, η_K, ζ_K kann man zwei willkürlich wählen, die dritte ist dann durch die Gleichung (4) bestimmt. Daraus folgt — nach der bekannten Multiplikatorenmethode — die Existenz einer Funktion v, so dass die Faktoren von ξ_K, η_K, ζ_K einzeln verschwinden. So erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} v' - \frac{\partial \Omega}{\partial u} u' + \omega'(s) + \lambda(s) \varphi_x \Big|^K = 0$$
$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial u} u' + \overline{\omega}'(s) + \lambda(s) \varphi_y \Big|^K = 0$$
$$\frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial v} v' - \frac{\partial \overline{\overline{\Omega}}}{\partial u} u' + \overline{\overline{\omega}}'(s) + \lambda(s) \varphi_z \Big|^K = 0,$$

und aus diesen Gleichungen folgen — analog, wie am Ende des des § 1 — die weiteren:

$$F_{x_u} v' - F_{x_v} u' + \lambda \varphi_x \Big|^K = 0$$
$$F_{y_u} v' - F_{y_v} u' + \lambda \varphi_y \Big|^K = 0$$
$$F_{z_u} v' - F_{z_v} u' + \lambda \varphi_z \Big|^K = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen u', v' und λ, so erhält man die Grenzbedingung des vorgelegten Variationsproblems:

$$\left|\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix}\right|^K = 0,$$

die hier — entsprechend dem Ziele dieser Arbeit — abgeleitet wurde ohne die Existenz der zweiten Differentialquotienten der Extremalfunktion vorauszusetzen.